

Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé :

Une approche motivique aux géométries positives

Intitulé en anglais du sujet de thèse proposé :

A motivic approach to positive geometries

Unité de recherche : IMB (UMR 5584, Université Bourgogne Europe & CNRS)

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-directeur) de thèse :

NAGEL Johannes, directeur (johannes.nagel@ube.fr)

CAVICCHI Mattia, co-directeur (mattia.cavicchi@ube.fr)

Domaine scientifique principal de la thèse :

Mathématiques

Domaine scientifique secondaire de la thèse :

Géométrie Algébrique

Description du projet scientifique :

La notion de *géométrie positive* a émergé ces dix dernières années [ABL17] au croisement entre géométrie algébrique et physique théorique, dans le but de construire des domaines semi-algébriques S dans $\mathbb{R}^N$, et des formes différentielles algébriques w sur ceux-ci, de sorte que l'intégrale de volume de w sur S calcule des *amplitudes de diffusion* apparaissant en théorie quantique des champs. En simplifiant, une géométrie positive est alors définie comme la donnée d'une variété algébrique complexe X , d'un fermé semi-algébrique X^+ des points réels $X(\mathbb{R})$ (la *partie positive*) et d'une forme méromorphe sur X dite *canonique*, uniquement caractérisée par une condition de récurrence, exprimant le fait que ses résidus le long des composantes de bord de X^+ et de leurs intersections itérées soient encore des formes canoniques. Beaucoup d'exemples de géométries positives sont connus aujourd'hui, mais on souhaiterait les réinterpréter dans une approche plus conceptuelle.

Dans un article récent [BD25], Brown et Dupont proposent une méthode systématique de construction de formes canoniques, à partir des classes d'homologie relative sur un pair (X, Y)

formé par une variété algébrique complexe X et une sous-variété Y , sujet à l'hypothèse géométrique d'avoir *genre zéro* (dans un sens précis défini dans l'article). La construction, très élégante, retrouve beaucoup des formes méromorphes provenant des géométries positives connues, mais comme observé dans [Tel25], n'a pas, en général, de structure récursive, et ne fait aucune mention des points réels de X . Toutefois, l'avantage conceptuel de l'approche de Brown et Dupont est l'usage de la *théorie de Hodge mixte*, qui révèle aussi un lien avec le *complexe dual*, un complexe simplicial construit à partir des intersections itérées des composantes de Y .

La filtration par le poids de la théorie de Hodge mixte et le complexe dual peuvent désormais se voir comme provenant de structures dans la catégorie triangulée DM_k des *motifs* sur un corps k . Le but de la thèse est de s'appuyer sur ces avancées pour reformuler la construction de Brown et Dupont en termes motiviques. Dans un premier temps, il s'agira de donner sens motivique à leur construction sur $k=\mathbb{C}$; dans un deuxième temps, de raffiner la construction sur $k=\mathbb{R}$, pour espérer récupérer l'information perdue sur les points réels ; finalement, d'utiliser la *slice filtration* disponible dans DM pour remplacer l'hypothèse de « genre zéro » par une condition plus générale, qui se réconcilie avec la nature récursive des géométries positives et permette de traiter de nouveaux exemples.

[ABL17] N. Arkani-Hamed, Y. Bai, T. Lam, *Positive geometries and canonical forms*, Journal of High Energy Physics 2017 (2017), no. 11, 39.

[BD25] F. Brown, C. Dupont, *Positive geometries and canonical forms via mixed Hodge theory*, arXiv:2501.03202, 2025.

[Tel25] S. Telen, *Positive Geometry of Polytopes and Polypols*, arXiv:2506.05510, 2025

Connaissances et compétences requises :

Géométrie positive, théorie de Hodge mixte, filtration par le coniveau