

Ecole Doctorale Carnot-Pasteur

Proposition de sujet de thèse

Intitulé français du sujet de thèse proposé :

Déformation de la mesure de Plancherel, théorie des représentations et problème de Riemann-Hilbert

Intitulé en anglais du sujet de these proposé :

Deformation of Plancherel measure, representation theory, and Riemann-Hilbert problem

Unité de recherche : IMB (UMR 5584, Université de Bourgogne & CNRS)

Nom, prénom et courriel du directeur (et co-directeur) de thèse :

KIMURA, Taro [taro.kimura@ube.fr]

Domaine scientifique principal de la thèse :

Théorie des représentations, probabilité, et analyse

Domaine scientifique secondaire de la thèse :

Description du projet scientifique :

La version française :

La mesure de Plancherel est une mesure de probabilité définie sur l'ensemble des représentations unitaires irréductibles d'un groupe compact. En particulier, nous nous intéressons au cas du groupe symétrique, où les représentations irréductibles sont paramétrées par des partitions. Soit λ une représentation irréductible du groupe symétrique S_n et notons $\dim \lambda$ sa dimension. La mesure de Plancherel est alors donnée par $\mu[\lambda] = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}$. En utilisant la dualité de Schur-Weyl ainsi que la formule de Weyl pour la dimension, on obtient une formule déterminantale pour la mesure de Plancherel. En effet, il est bien connu que la mesure de Plancherel possède la structure d'un processus ponctuel déterminantal discret, ce qui signifie que toutes ses fonctions de corrélation peuvent s'exprimer comme des déterminants du noyau de corrélation. Par conséquent, la probabilité qu'aucun élément ne soit présent dans un certain intervalle, appelée probabilité d'écart, est donnée par le déterminant

de Fredholm associé au noyau de corrélation. Ce déterminant de Fredholm satisfait une propriété isomonodromique, ce qui conduit à une équation différentielle ou aux différences non linéaire, connue sous le nom d'équation de Painlevé, obtenue à partir du problème de Riemann-Hilbert du système linéaire correspondant.

L'objectif de ce projet est d'étudier une q -déformation de la mesure des représentations irréductibles en lien avec le problème de Riemann-Hilbert pour le système q -linéaire. Le but est d'établir la q -déformation de la hiérarchie de Painlevé et sa généralisation en relation avec la probabilité d'écart. De plus, on cherche à élucider la structure géométrique sous-jacente du système q -isomonodromique ainsi que l'objet appelé q -oper, en explorant ses applications aux systèmes intégrables (trigonométriques) et à la correspondance de Langlands géométrique.

English version :

The Plancherel measure is a probability measure defined on the set of irreducible unitary representations of a compact group. In particular, we focus on the case of the symmetric group, where irreducible representations are parametrized by partitions. Let λ be an irreducible representation of the symmetric group S_n , and denote its dimension by $\dim \lambda$. The Plancherel measure is then given by $\mu[\lambda] = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}$. By invoking the Schur-Weyl duality and the Weyl dimension formula, one obtains a determinantal formula for the Plancherel measure. In fact, the Plancherel measure is known to exhibit the structure of a discrete determinantal point process, meaning that all correlation functions can be expressed as determinants of the so-called correlation kernel. Consequently, the probability of finding no element in a given interval, referred to as the gap probability, is given by the Fredholm determinant associated with the correlation kernel. This Fredholm determinant possesses the isomonodromic property, which leads to a nonlinear differential or difference equation, commonly known as the Painlevé equation, derived from the Riemann-Hilbert problem of the corresponding linear system.

The objective of this project is to investigate a q -deformation of the measure of irreducible representations in conjunction with the Riemann-Hilbert problem for the q -linear system. Our aim is to establish the q -deformation of the Painlevé hierarchy and its generalization in relation to the gap probability. Furthermore, we seek to elucidate the underlying geometric structure of the q -isomonodromic system together with the so-called q -oper, exploring its applications to (trigonometric) integrable systems and the geometric Langlands correspondence.

Connaissances et compétences requises :

Notions de base de la théorie des représentations, de la probabilité et de l'analyse complexe /
Basics of representation theory, probability, and complex analysis