Journée de la Fédération de Recherche BFC - Mathématiques

Vendredi 18 Novembre 2022

Centre Diocésain (Grande Salle A), Besançon

09h30 - 9h45 :	Accueil
9h45 - 10h45 :	Sébastien Leurent - *Intégrabilité quantique de certaines chaînes de spins et théories de champs conformes*
10h45 - 11h10 :	Pause Café
11h10 - 11h30 :	Jack Borthwick - *Morse type information for constrained functionals*
11h35 - 11h55 :	Clémentine Lemarié-Rieusset - *Théorie motivique des nœuds*
12h00 – 13h30 :	Déjeuner
13h30 - 14h30 :	Christine Huyghe - *L'algorithme de Kedlaya pour calculer la fonction zêta d'une courbe hyperelliptique.*
14h35 - 14h55 :	Thibaut Duboux - *Marches aléatoires maximales entropiques sur des graphes et limites d'échelles.*
15h00 - 15h20 :	Charles Duquet - *Propriétés de dilatation des multiplicateurs de Schur et exemple d'opérateur non dilatable.*
15h20 - 15h45 :	Pause Café
15h45 - 16h45 :	Virginie Ehrlacher - *Optimal transport for model order reduction*

Résumés des exposés

Jack Borthwick : In 1992 Fang and Ghoussoub showed that unconstrained functionals on Hilbert space with a mountain-pass geometry, possess at the mountain-pass level a Palais-Smale sequence whose elements satisfy a second-order constraint, roughly, its terms have Morse index at most 1. This information can be exploited to find exact critical points, for instance as an ingredient in the proof that the sequence converges. In this talk, I will discuss recent work in collaboration with X. Chang, L. Jeanjean, and N. Soave where we revisit and adapt the ideas of Fang-Ghoussoub to treat the case of constrained functionals, paying close attention to the geometry of the constraint and based solely on geometrically meaningful objects that are easy to handle.

Thibaut Duboux : On cherche à maximiser l'entropie globalement sur un graphe donné c'est à dire sur toutes les trajectoires possibles. Lorsque le graphe est fini on peut montrer aisément qu'un tel processus est défini de manière unique : on l'appelle « la marche aléatoire maximale entropique ». Cependant, il est très difficile d'expliciter, même numériquement, les probabilités de transition ainsi que la mesure invariante de cette chaîne de Markov. En effet, ces quantités dépendent du spectre de la matrice d'adjacence du graphe et plus précisément du rayon spectral et du vecteur propre associé à celui-ci. Il se trouve que le carré de ce vecteur n'est rien d'autre que la probabilité invariante de la marche aléatoire à entropie maximale.

Dans cet exposé, on définira donc le modèle général de cette marche. Puis un intérêt tout particulier sera porté sur le cas des graphes infinis où l'unicité n'est plus immédiate. Sur ces derniers, on pourra naturellement effectuer des limites d'échelles de cette marche aléatoire et reconnaître des processus limites classiques.

Charles Duquet : Grâce au théorème d'Akcoglu, on sait que toute contraction positive sur un espace Lp est dilatable en une isométrie sur un autre espace Lp. On pourrait espérer une généralisation de ce théorème aux espaces Lp non-commutatifs. Ce n'est pas le cas : il existe des exemples de contractions positives sur de tels espaces qui n'admettent pas de dilatation isométrique. On s'intéresse dans cet exposé à une classe particulière de multiplicateurs de Schur sur l'espace des matrices carrées vu comme un espace Lp non commutatif (de dimension finie) et à leurs propriétés de dilatation. Nous obtenons notamment un nouvel exemple de contraction positive sur un espace Lp non-commutatif qui n'admet pas de dilatation isométrique.

Virginie Ehrlacher : The first part of the talk will be devoted to an introduction to the field of model order reduction. The objective of model reduction approaches is the following: assume that one needs to compute the solution of a system of parametrized PDEs for a very large number of values of the parameters the system depends on. This is a situation which is encountered in many practical and industrial applications for design optimization, real-time control or uncertainty quantification for instance. For complex applications, such parametric studies are often out of reach from a computational point of view with standard numerical methods because of their prohibitive computing cost. In such a context, reduced-order modelling provides generic methods in order to construct an approximate model, called a reduced-order model, which enables to obtain approximations of the solutions of the original parametrized PDE system at a significantly reduced computational cost. For this, the bottom line of most strategies has so far been based on the approximation of the set of parametrized solutions by small-dimensional linear spaces on Hilbert or Banach spaces. This approach can be expected to be successful only when the so-called Kolmogorov width of the solution set decays fast. While this is the case on certain parabolic or elliptic problems, most transport-dominated problems are expected to present a slow decaying width and require to study nonlinear approximation methods.

In the second part of the talk, I will present some recent theoretical and numerical results about nonlinear reduced-order modeling approaches based on optimal transport theory, in particular using Wasserstein barycenters, in order to circumvent the aforementioned difficulties linked to transport-dominated problems. This is based on joint works with Geneviève Dusson, Damiano Lombardi, Olga Mula and François-Xavier Vialard.

Christine Huyghe : On se donne un polynôme f à coefficients dans le corps fini F_p pour p premier et on s'intéresse à tous les couples de solutions (x,y) de l'équation $y^2=f(x)$, où x et y sont des éléments dans des corps finis de car $p>0$. On sait depuis Weil que cette information est codée dans la fonction Zêta de la courbe d'équation $y^2=f(x)$. Les méthodes de calcul de cette fonction sont plus récentes : nous exposerons l'algorithme de Kedlaya, qui fait appel à des équations différentielles p-adiques simples (linéaires).

Sébastien Leurent : Certains modèles quantiques sont dits "intégrables", c'est à dire qu'ils présentent des propriétés algébriques qui permettent de les "résoudre" de manière "exacte". Concrètement, nous définirons des chaînes de spins, dont la résolution serait la diagonalisation d'une matrice de grande taille, et mentionnerons des théories de champs quantiques comme la théorie de Super-Yang-Mills (N=4). Nous illustrerons leur intégrabilité dans le cas de l'étude de leur spectre par différentes méthodes qualifiées d'Ansatz de Bethe. Une des plus récentes d'entre elles "l'Ansatz de Bethe Wronskien" réduit la détermination de leur spectre à la résolution d'équations fonctionnelles sous certaines contraintes d'analyticité (problème de Riemann-Hilbert, qui pour ces théories de champs est connu sous le nom de "courbe spectrale quantique"). L'exposé se veut pédagogique et ne nécessite pas de prérequis sur la physique quantique.

Clémentine Lemarié-Rieusset : Dans cet exposé je présenterai la théorie motivique des nœuds: une théorie en géométrie algébrique qui fait une analogie avec la théorie des nœuds, grâce à la théorie de l'homotopie motivique. La théorie des nœuds s'intéresse aux nœuds fermés (imaginez un lacet de chaussure auquel vous faites un nœud puis dont vous collez ensemble les deux bouts) et leur assigne des orientations (comme les deux orientations du cercle : le sens trigonométrique et le sens horaire) afin de pouvoir calculer des invariants de nœuds qui permettent de les classifier. Un tel invariant est l'enlacement (linking number) de deux nœuds orientés disjoints : c'est un nombre entier relatif qui indique combien de fois un des nœuds tourne autour de l'autre (le signe indiquant dans quel sens il tourne). Je présenterai des analogues des nœuds en géométrie algébrique et un analogue de l'enlacement, que j'ai nommé enlacement quadratique car il fait intervenir des formes quadratiques !